Partitions d'un entier en parts fixées

<u>Théorème :</u> Soient $a_1, \dots, a_k$ des entiers naturels non nuls premiers entre eux dans leur ensemble. Pour tout $n \geq 1$, on note u_n le nombre de k-uplets $(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{N}^k$ tels que $a_1 x_1 + \dots + a_k x_k = n$.

On a $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{a_1 \cdots a_k} \cdot \dfrac{n^{k-1}}{(k-1)!}$.

<u>Démonstration :</u> On commence par effectuer le produit de Cauchy des séries formelles $\sum_{x_i \in \mathbb{N}} Z^{x_i a_i}$ pour $i \in [\![1, k]\!]$, ce qui donne :

$$\prod_{i=1}^{k} \sum_{x_i \in \mathbb{N}} Z^{x_i a_i} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \left| \{ (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{N}^k / a_1 x_1 + \dots + a_k x_k = n \} \right| Z^n$$

$$= \sum_{n \in \mathbb{N}} u_n Z^n$$

Par Bézout, on fixe $y_1, \dots, y_k \in \mathbb{N}$ tels que $\sum_{i=1}^{k} a_i y_i = 1$. Si ω est une racine de l'unité telle que $\omega^{a_1} = \dots = \omega^{a_k} = 1$, on a $\omega = \omega^{\sum_{i=1}^{k} a_i y_i} = \prod_{i=1}^{k} (\omega^{a_i})^{y_i} = 1$.

On note $P = \{ \omega_1, \dots, \omega_p \}$ l'ensemble des pôles de $\prod_{i=1}^{k} \dfrac{1}{1 - Z^{a_i}}$, avec $\omega_1 = 1$ (qui est le seul pôle d'ordre k), et, pour tout $i \in [\![2, p]\!]$, on note $o(\omega_i)$ l'ordre de ω_i comme pôle, qui vaut au plus $k-1$.

$$\text{On a } \prod_{i=1}^{k} \frac{1}{1 - Z^{a_i}} = \frac{1}{(1-Z)^k} \cdot \prod_{i=2}^{p} \frac{1}{(\omega_i - Z)^{o(\omega_i)}}$$

$$= \frac{\alpha}{(1-Z)^k} + \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{k-1} \frac{c_{ij}}{(\omega_i - Z)^j}, \text{ avec } c_{ij} \in \mathbb{C} \text{ (décomposition en éléments simples)}$$

<u>Lemme :</u> Pour tout $r \geq 0$, on a $\dfrac{1}{(1-T)^{r+1}} = \sum_{j \geq 0} \binom{j+r}{j} T^j$ dans $\mathbb{C}[\![X]\!]$.

$$\text{Donc } \prod_{i=1}^{k} \sum_{x_i \in \mathbb{N}} Z^{x_i a_i} = \prod_{i=1}^{k} \frac{1}{1 - Z^{a_i}} = \sum_{n \geq 0} \left[\alpha \binom{n+k-1}{n} + \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{k-1} \frac{c_{ij}}{\omega_i^{j+n}} \binom{n+j-1}{n} \right] T^n$$

ce qui donne, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \alpha \dbinom{n+k-1}{n} + \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{k-1} \dfrac{c_{ij}}{\omega_i^{j+n}} \dbinom{n+j-1}{n}$.

On remarque alors que $\binom{n+k-1}{n} = \dfrac{(n+k-1)\dots(n+1)}{(k-1)!} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n^{k-1}}{(k-1)!}$,

$$\binom{n+j-1}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{j-1}}{(j-1)!} \quad \text{pour tout } j \in [\![1, k-1]\!]$$

ce qui donne, pour tous $i \in [\![1,p]\!]$ et $j \in [\![1,k-1]\!]$, $\dfrac{c_{ij}}{\omega_i^{j+n}} \binom{n+j-1}{n} = o\left(\alpha \binom{n+k-1}{n}\right)$,

donc $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{k-1} \frac{c_{ij}}{\omega_i^{j+n}} \binom{n+j-1}{n} = o\left(\alpha \binom{n+k-1}{n}\right)$,

d'où $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \alpha \dbinom{n+k-1}{n} \sim \dfrac{\alpha\, n^{k-1}}{(k-1)!}$. Il reste à calculer α.

Pour ce faire, on écrit

$$(1-z)^k \prod_{i=1}^{k} \frac{1}{1-z^{a_i}} = \alpha + (1-z)^k \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{k-1} \frac{c_{ij}}{(\omega_i - z)^j} ,$$

$$\parallel$$

$$\prod_{i=1}^{k} \frac{1}{1+z+\dots+z^{a_i-1}}$$

et on fait, formellement, $z=1$, ce qui donne $\alpha = \dfrac{1}{a_1 \cdots a_k}$

Finalement, on obtient $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{a_1 \cdots a_k} \cdot \dfrac{n^{k-1}}{(k-1)!}$, ce qui achève la preuve.